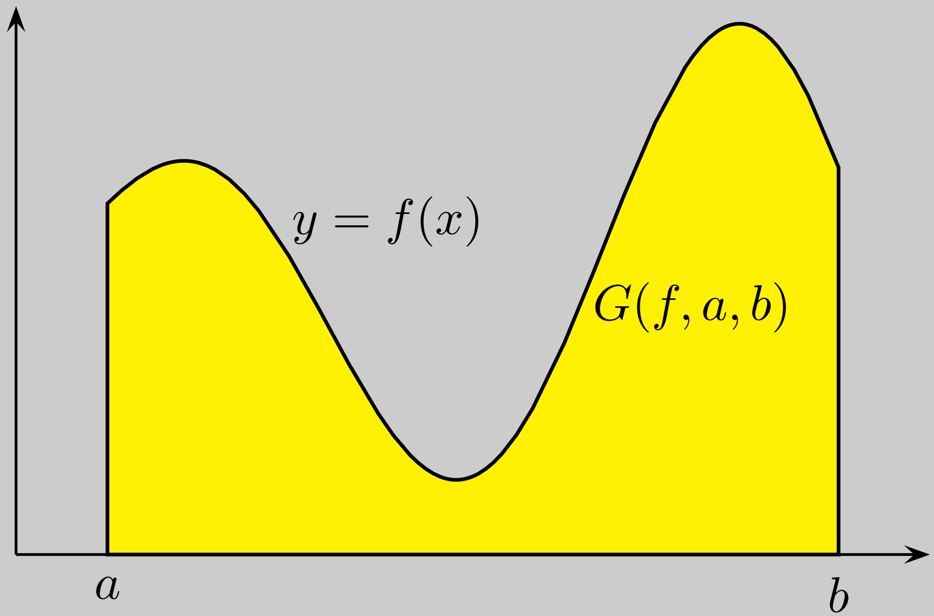
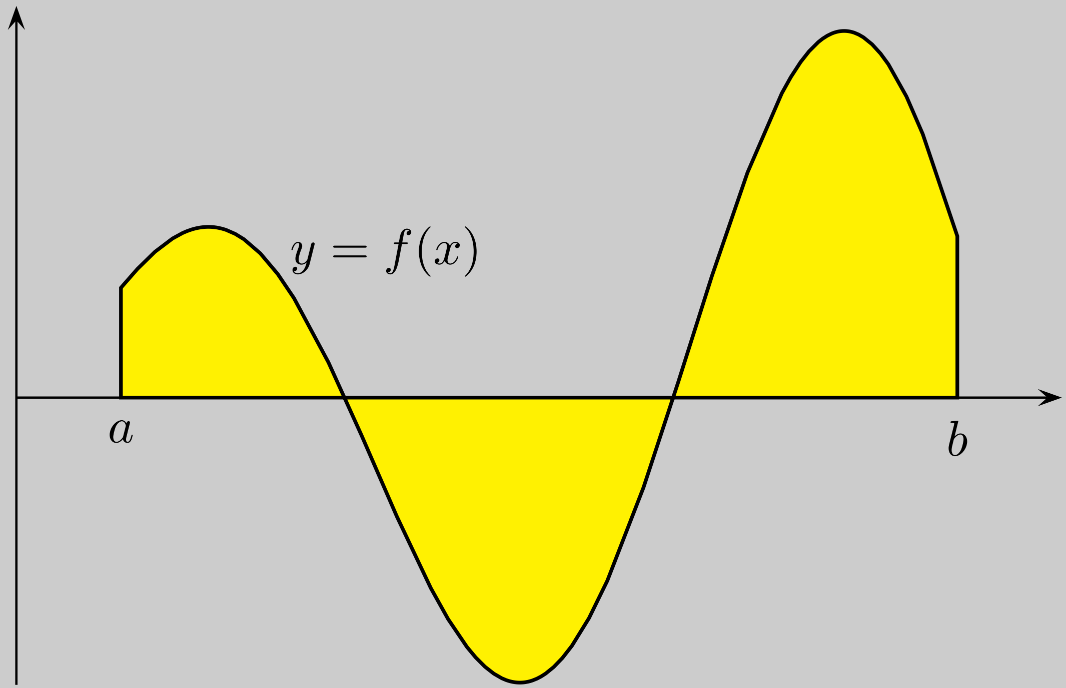
Integración de funciones de una variable

Área del conjunto limitado por una gráfica

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ notaremos por $G(f, a, b)$ el conjunto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$.


$y = f(x)$
$G(f, a, b)$
a
b


$y = f(x)$
a
b

Partición de un intervalo

Queremos dar una definición matemática del área de dicho conjunto. Para ello, primero se divide el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Se dice que estos puntos constituyen una **partición** de $[a, b]$.

Sumas superior e inferior

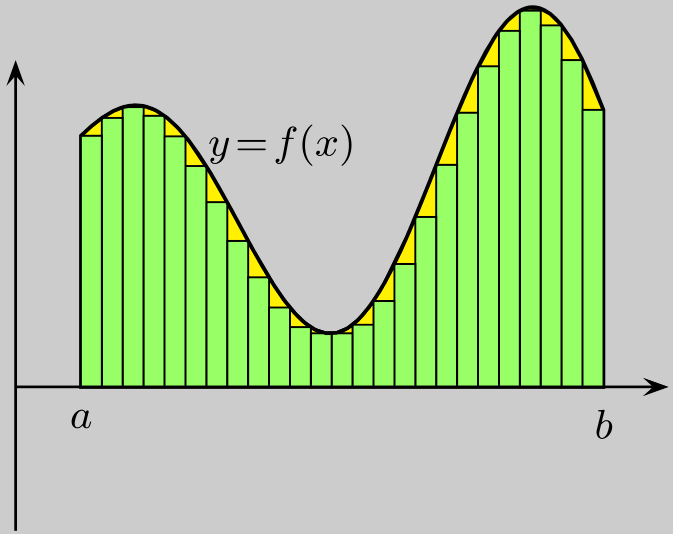
Dada una partición $P=\{a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n=b\}$ del intervalo $[a,b]$, sea $M_k=\sup f[x_{k-1}, x_k]$ y $m_k=\operatorname{ínf} f[x_{k-1}, x_k]$. Los números

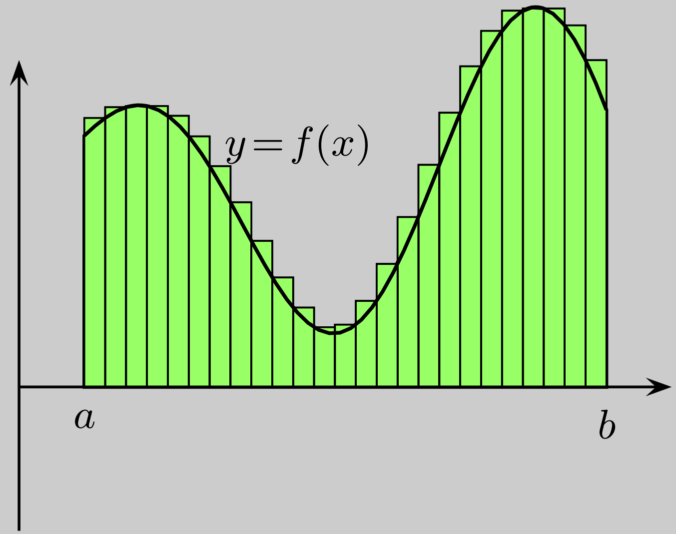
$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1}), \qquad I(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$$

se llaman, respectivamente, **suma superior** y **suma inferior** de f para la partición P.

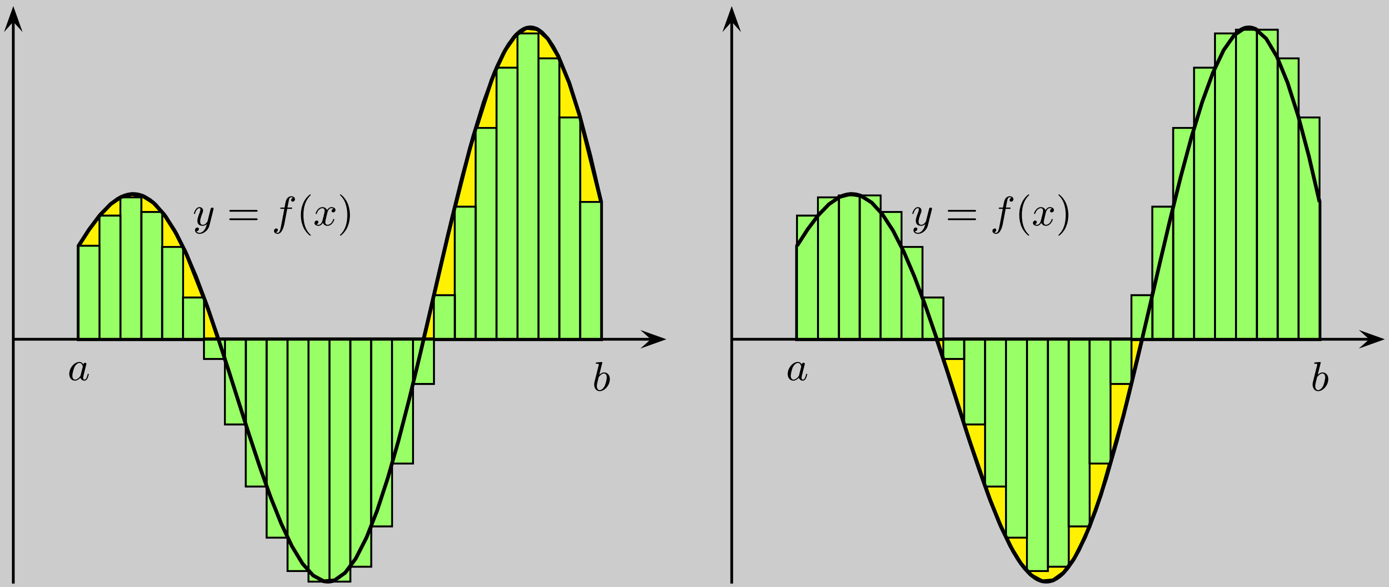
Interpretación de las sumas superior e inferior

- Cuando f *es positiva* y suficientemente "buena", y las longitudes de todos los subintervalos de la partición son suficientemente pequeñas, el número $S(f,P)$ es un *valor aproximado por exceso* del área de la región $G(f,a,b)$, y el número $I(f,P)$ es un *valor aproximado por defecto* del área de la región $G(f,a,b)$.


$y = f(x)$
a
b


$y = f(x)$
a
b

- Cuando la función f toma valores positivos y negativos, el número $S(f, P)$ es un *valor aproximado por exceso* del área de la parte de $G(f, a, b)$ que está en el semiplano superior (donde f es positiva) menos el área de la parte de $G(f, a, b)$ que está en el semiplano inferior (donde f es negativa), y el número $I(f, P)$ es un *valor aproximado por defecto*.



$y = f(x)$
a
b
$y = f(x)$
a
b

Partes positiva y negativa de una función

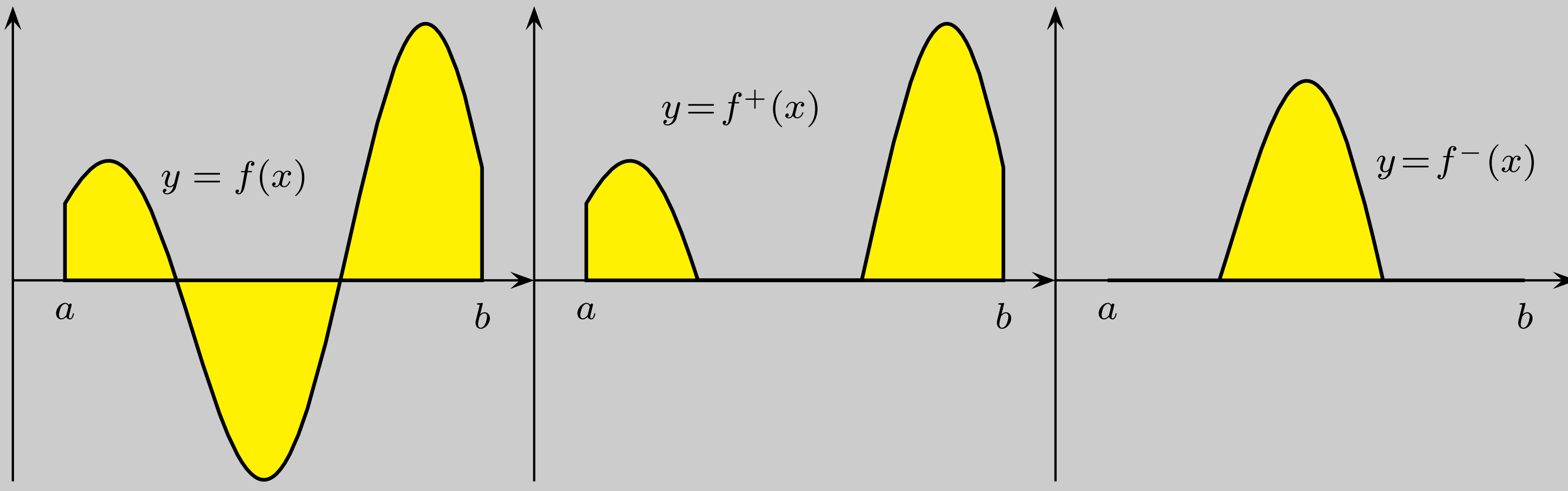
Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

$$f^{+}(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^{-}(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \max\{-f(x), 0\}$$

Es claro que $f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x)$ y que $f^{+}(x) \geqslant 0$, $f^{-}(x) \geqslant 0$. La función f^{+} se llama **parte positiva** de f, y la función f^{-} se llama **parte negativa** de f.

Como consecuencia de las definiciones dadas $|f(x)| = f^{+}(x) + f^{-}(x)$.


$y = f(x)$
a
b
$y = f^+(x)$
a
b
$y = f^-(x)$
a
b

La integral como área

Sea f una función acotada y positiva en $[a,b]$. Se dice que el conjunto $G(f,a,b)$ **tiene área** cuando

$$\boxed{\inf\{S(f,P) : P\in\mathcal{P}[a,b]\} = \sup\{I(f,P) : P\in\mathcal{P}[a,b]\}}$$

Dicho valor común es, por definición, el valor del área y lo representaremos por $\lambda(G(f,a,b))$. Cuando esto ocurre, se dice también que la función f **es integrable Riemann** en $[a,b]$ y, por definición, la integral de f en $[a,b]$ es igual a $\lambda(G(f,a,b))$. Simbólicamente escribimos:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda(G(f,a,b))}$$

La integral como área

En el caso general en que la función f toma valores positivos y negativos, se dice que f es integrable Riemann en $[a,b]$ cuando lo son las funciones f^+ y f^-, en cuyo caso se define la integral de f en $[a,b]$ como el número:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x = \lambda(G(f^+,a,b)) - \lambda(G(f^-,a,b))}$$

Área del conjunto $G(f, a, b)$

En el caso en que la función f toma valores positivos y negativos, observa que la gráfica de f^- se obtiene por simetría respecto al eje de abscisas de las partes de la gráfica de f en las que $f(x) < 0$. Como regiones simétricas respecto de una recta tienen la misma área, se sigue que:

$$\lambda(G(f, a, b)) = \lambda(G(f^+, a, b)) + \lambda(G(f^-, a, b)) =$$

$$= \lambda(G(f^+ + f^-, a, b)) = \lambda(G(|f|, a, b)) = \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

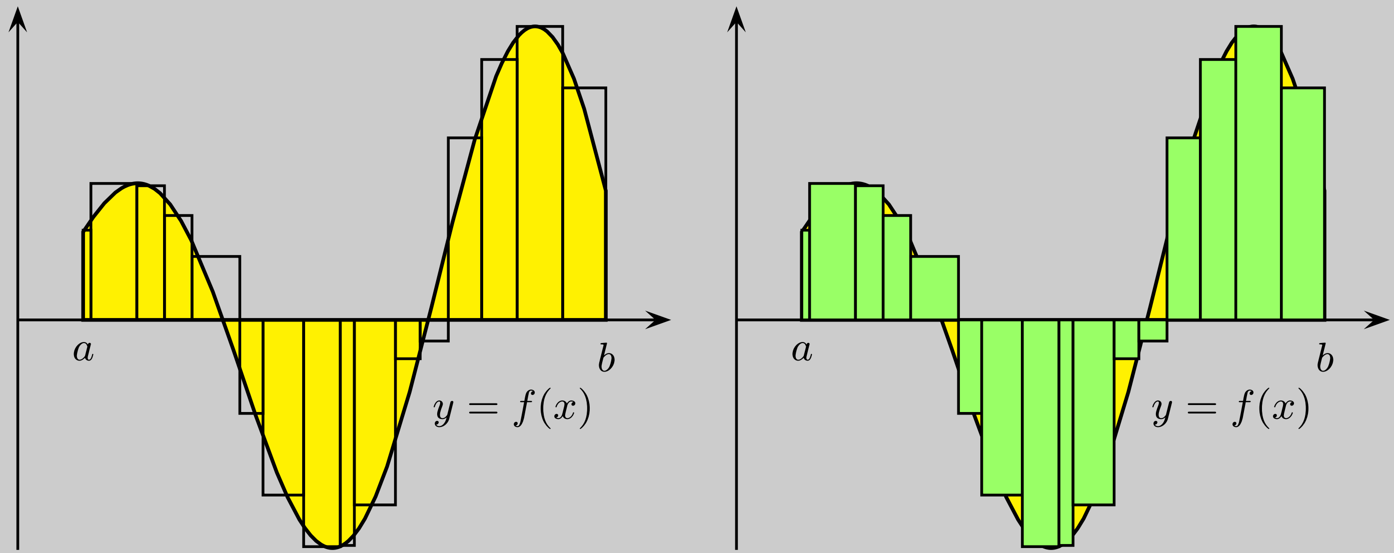
Sumas de Riemann

Dada una partición $P=\{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ de $[a,b]$, elijamos de cualquier modo en cada subintervalo un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y formemos el rectángulo cuya base es el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y altura igual a $f(t_k)$. El número

$$\sigma(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

se llama una suma de Riemann de f para la partición P.

- Puesto que para todo $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ es $m_k \leqslant f(t_k) \leqslant M_k$, deducimos que para toda suma de Riemann, $\sigma(f,P)$, de f para la partición P es $I(f,P) \leqslant \sigma(f,P) \leqslant S(f,P)$.



a
b
y = f(x)
a
b
y = f(x)

Propiedades básicas de la integral

Linealidad. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y α, β son números reales, se verifica que la función $\alpha f + \beta g$ también es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Propiedades básicas de la integral

Conservación del orden. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces se verifica que:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular, si f es integrable en $[a, b]$ y $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Propiedades básicas de la integral

Si f es integrable en $[a, b]$ también $|f|$ (función valor absoluto de f) es integrable en $[a, b]$ y se verifica la desigualdad:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Propiedades básicas de la integral

El producto de funciones integrables Riemann también es una función integrable Riemann.

Aditividad respecto del intervalo. Sea $a < c < b$. Una función f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, en cuyo caso se verifica la igualdad:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Condiciones suficientes de integrabilidad Riemann

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Cada una de las siguientes condiciones garantizan que f es integrable Riemann en $[a, b]$.

a) f está acotada en $[a, b]$ y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$. En particular, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es integrable en dicho intervalo.

b) f es monótona en $[a, b]$.

La pregunta que os estáis haciendo

¿Cómo podemos, a partir de la definición dada, calcular $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$?

Aproximando por sumas de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable y definamos $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ por:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

para todo $x\in[a,b]$. Entonces:

i) F es continua en $[a,b]$.

ii) En todo punto c de $[a,b]$ en el que f sea continua se verifica que F es derivable en dicho punto siendo $F'(c)=f(c)$. En particular, si f es continua en $[a,b]$, entonces F es derivable en $[a,b]$ y $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in[a,b]$.

Primitivas

Dada un función $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, cualquier función $H:[a,b]\to\mathbb{R}$ que sea continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verifique que $H'(x)=h(x)$ para todo $x\ \in]a,b[$, se llama una **primitiva** de f en el intervalo $[a,b]$.

Toda función continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo.

Sea $f:I\to\mathbb{R}$ continua. Sea $a\in I$. La función $F:I\to\mathbb{R}$ dada por:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

es una primitiva de f en I.

Convenio

A veces hay que considerar funciones de la forma

$$H(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

en donde $a < c < b$ y $x \in [a, b]$; por lo que es necesario precisar lo que se entiende por $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ cuando $x < c$. El convenio que se hace es que:

$$\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_v^u f(t)\,\mathrm{d}t$$

cualesquiera sean los números u y v.

Derivación de funciones definidas por integrales

Para derivar funciones de la forma

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donde f es una función continua y g es una función derivable, se aplica el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena para derivar la función compuesta $H(x) = F(g(x))$, donde

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Derivación de funciones definidas por integrales

Para derivar funciones de la forma

$$H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donde f es una función continua y u, v son funciones derivables, se escribe

$$H(x) = \int_{a}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{a}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

y se aplica lo dicho en el punto anterior.

Técnica para calcular integrales de funciones continuas

El Teorema Fundamental del Cálculo proporciona también una técnica para calcular la integral de una *función continua* en un intervalo $[a,b]$. Para ello lo que hacemos es calcular una primitiva de f en $[a,b]$. Si h es una tal primitiva, entonces las funciones $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, y $h(x)-h(a)$ son dos primitivas de f en $[a,b]$ que coinciden en un punto, pues ambas se anulan en a. Deducimos que $F(x)=h(x)-h(a)$ para todo $x\in[a,b]$ y, por tanto, $F(b)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=h(b)-h(a)$. Podemos generalizar este resultado para funciones integrables que admitan primitiva sin exigir que sean continuas.

Regla de Barrow

Es la herramienta principal para calcular integrales. Dice así:

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y supongamos que h es una primitiva de f en $[a,b]$. Entonces:

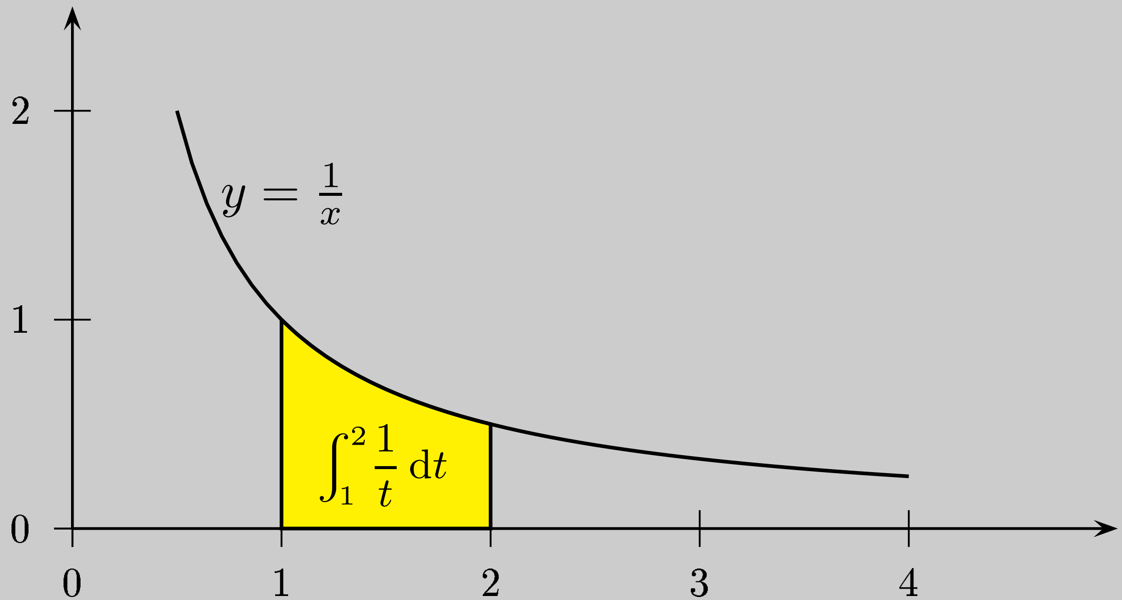
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a)$$

Las funciones logaritmo y exponencial

Para todo $x > 0$ se define:

$$\boxed{\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}$$

El logaritmo natural de x es el área bajo la hipérbola $y = \dfrac{1}{t}$ cuando la variable t toma valores en el intervalo de extremos 1 y x.



$y = \frac{1}{x}$
$\int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$
0
1
2
0
1
2
3
4

Integrales impropias de Riemann

Queremos precisar el significado que debemos dar a la integral de una función no acotada o a la integral en un intervalo no acotado.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha > 0)$$

Convergencia de integrales impropias de Riemann

Sea $f : [c, b[\to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[c, b[$, donde suponemos que $c \in \mathbb{R}$ y que b un número real mayor que c o bien $b = +\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $[c, b[$ como el límite:

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to b} \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Supuesto, claro está, que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $[c, b[$.

Convergencia de integrales impropias de Riemann

Sea $f :]a, c] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $]a, c]$, donde suponemos que $c \in \mathbb{R}$ y que a un número real menor que c o bien $a = -\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $]a, c]$ como el límite:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to a} \int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Supuesto, claro está, que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $]a, c]$.

Integrales impropias divergentes

Cuando los límites anteriores existen y son igual a $+\infty$ (resp. $-\infty$) se dice que la respectiva integral es positivamente o negativamente divergente.

Convergencia de integrales impropias de Riemann

Sea $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $]a,b[$, donde $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Sea $c \in \mathbb{R}$ con $a < c < b$. Se dice que la integral de f es convergente en $]a,b[$ cuando las integrales de f en $]a,c]$ y en $[c,b[$ son convergentes, en cuyo caso se define:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ejemplos importantes

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x^a}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^a}\,\mathrm{d}x$$

Criterios de convergencia para integrales impropias

Naturalmente, no siempre vamos a disponer de una primitiva expresable por medio de funciones elementales, bien porque no exista o porque su cálculo efectivo sea muy complicado. Por ello, interesa conocer condiciones que aseguren la convergencia de una integral sin necesidad de conocer una primitiva elemental. Lógicamente, estas condiciones no nos permitirán calcular el valor numérico de la integral; tan sólo nos dirán si es o no convergente. Estos criterios de convergencia son muy fáciles para el caso de funciones positivas.

Criterio básico de convergencia

Sea f continua y positiva en $[c, b[$. Entonces, la integral de f en $[c, b[$ es convergente si, y sólo si, la función $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ está mayorada en $[c, b[$, en cuyo caso:

$$\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup\left\{\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \ : x \in [c, b[\right\}$$

En otro caso la integral de f en $[c, b[$ es positivamente divergente.

Criterio de comparación

Sean f y g continuas y positivas en $[c, b[$. Supongamos que la integral de g en $[c, b[$ es convergente y que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [c, b[$. Entonces la integral de f en $[c, b[$ también es convergente.

Criterio límite de comparación

Sean f y g continuas y positivas en $[c,b[$. Supongamos que:

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \rho \in \mathbb{R}^+.$$

Entonces las integrales de f y g en $[c,b[$ ambas convergen o ambas divergen positivamente.

Integrales impropias absolutamente convergentes

Se dice que la integral de f es **absolutamente convergente** en un cierto intervalo cuando la integral de la función $|f|$ es convergente en dicho intervalo.

Si la integral de f es absolutamente convergente, entonces la integral de f también es convergente.

Primer teorema de la media para integrales

Sean f una función continua en $[a,b]$ y g una función positiva e integrable en $[a,b]$. Entonces se verifica que hay algún punto $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Segundo teorema de la media para integrales

Sea φ una función monótona y con derivada continua en $[a, b]$, y sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces hay algún punto $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(a)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \varphi(b)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Derivadas e integrales de funciones complejas de variable real

Una función compleja de variable real es una función de la forma $h(t) = f(t) + i\,g(t)$ donde f, g son funciones reales definidas en un intervalo I. Se dice que f es la parte real de h y g es la parte imaginaria, y escribimos $f = \mathrm{Re}(h)$, $g = \mathrm{Im}(h)$. Cuando las funciones f y g son derivables, se dice que h es derivable y se define su derivada por la igualdad:

$$h'(t) = f'(t) + i\,g'(t).$$

Derivadas e integrales de funciones complejas de variable real

Cuando las funciones f y g son integrables en un intervalo $[a,b]$ se dice que h es integrable en $[a,b]$ y se define la integral de h en $[a,b]$ por la igualdad:

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Naturalmente, si F y G son, respectivamente, primitivas de f y g en un intervalo $[a,b]$, entonces $H(t)=F(t)+i\,G(t)$ es una primitiva de h en $[a,b]$ y se verifica la regla de Barrow:

$$\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = H(b) - H(a).$$

Derivadas e integrales de funciones complejas de variable real

Análogamente, si f y g son continuas en un intervalo I y elegimos un punto $a \in I$, la función:

$$H(x) = \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

es una primitiva de h en I.

Ejemplo

Sea $\alpha + i\beta$ un número complejo, la función:

$$h(t) = \mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{i\beta t} = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + i\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$$

es derivable y su derivada viene dada por:

$$h'(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t) + i\big(\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t) + \beta\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)\big) =$$

$$= \mathrm{e}^{\alpha t}(\alpha + i\beta)\big(\cos(\beta t) + i\,\mathrm{sen}(\beta t)\big) = (\alpha + i\beta)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{i\beta t} = (\alpha + i\beta)h(t)$$

Como era de esperar, hemos obtenido que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t} = (\alpha + i\beta)\,\mathrm{e}^{(\alpha+i\beta)t}\,.$$

Ejemplo

En consecuencia:

$$\int e^{(\alpha+i\beta)t}\ dt = \frac{1}{\alpha+i\beta}\, e^{(\alpha+i\beta)t} =$$

$$= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\Big(\alpha\cos(\beta t)+\beta\,\mathrm{sen}(\beta t)+i\big(\alpha\,\mathrm{sen}(\beta t)-\beta\cos(\beta t)\big)\Big)$$

Ejemplo

Luego

$$\int e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\big(\alpha\cos(\beta t)+\beta\,\mathrm{sen}(\beta t)\big)$$

$$\int e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)\,dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\big(\alpha\,\mathrm{sen}(\beta t)-\beta\cos(\beta t)\big)$$

Ejercicio

Calcula los límites de las siguientes sucesiones expresándolas como sumas de Riemann.

$$a)\ x_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad (\alpha > 0)$$

$$e)\ x_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n^2}$$

$$i)\ x_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$$

Ejercicio

Calcula la derivada de las siguientes funciones.

$$a)\ G(x) = \int_0^{x^3} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \qquad b)\ G(x) = \int_{x^2}^{1} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}\,\mathrm{d}t$$

$$c)\ G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2+x} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad d)\ G(x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} \operatorname{sen}(\log t)\,\mathrm{d}t$$

$$e)\ G(x) = \int_0^{x} \left(\int_1^{y^2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y \qquad f)\ G(x) = \int_0^{\int_1^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,\mathrm{d}u} \frac{1}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}\,\mathrm{d}t$$

Ejercicio

Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica la igualdad:

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\, \mathrm{d}t + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{t} = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio

Sea $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$. Estudia los extremos relativos y absolutos de F, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y calcula el límite de F en $+\infty$.

Ejercicio

Calcula los siguientes límites.

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle x\int_0^{x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{x} \mathrm{e}^{t^2}\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t} \qquad c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \left(\mathrm{e}^{-t^2}-\mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{d}t}{x\sqrt{x}}$$

Ejercicio

Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias y calcúlalas cuando sean convergentes.

$$a)\ \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+x+1}} \qquad b)\ \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$$

$$d)\ \int_0^{+\infty} \frac{1+x^4}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x \qquad e)\ \int_0^{1} \frac{\log x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad f)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencias. En *a)* hacer $x = 1/t$ y en *d)* $x = \operatorname{tg} t$.

Ejercicio

Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$a)\ \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad b)\ \int_0^1 \frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int_0^{+\infty} \frac{x+5}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia. Usa los criterios de comparación.

Ejercicio

Estudia la convergencia de la integral

$$I = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} \, \mathrm{d}x$$

Según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Técnicas de cálculo de primitivas

¿Para qué?

El problema del cálculo de primitivas consiste en tratar de expresar la ***"primitiva trivial"***

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

por medio de funciones elementales que permitan una evaluación efectiva de la integral.

No siempre puede hacerse

Es frecuente que una función elemental no tenga primitivas que puedan expresarse por medio de funciones elementales.

Esto ocurre, por ejemplo, con las funciones e^{-x^2}, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\operatorname{sen}(x^2)$, $\sqrt{x^3+1}$, y muchas más.

Vamos a ver algunos tipos de funciones elementales cuyas primitivas también pueden expresarse por medio de funciones elementales y pueden calcularse con procedimientos más o menos sistemáticos.

Notación y terminología usuales

Para representar una primitiva de una función f, se usa la notación

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

La integral de una función en un intervalo, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, se llama a veces ***“integral definida”*** de f (**y es un número**).

El símbolo $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ se llama ***“integral indefinida”*** o, simplemente, *“integral”* de f (y ***representa una primitiva cualquiera*** de f).

No te confundas

Aunque esto puede ser confuso, no olvides que, ***cuando hablamos de calcular la integral*** $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ***lo que realmente queremos decir es que queremos calcular una primitiva de*** f**.**

Variable de integración

Como ya sabes, en los símbolos $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la letra "x" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "$\mathrm{d}x$" (que se lee *"diferencial x"*) sirve para indicar la variable de integración. Esto es muy útil si la función f contiene parámetros. Por ejemplo, son muy diferentes las integrales $\int x^y dx$ y $\int x^y dy$.

Notación diferencial para la derivada

Te recuerdo también que, si $y = y(x)$ es una función de x, suele usarse la notación $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$ que es útil para mecanizar algunos cálculos pero que no tiene ningún significado especial: es una forma de indicar que y' es la derivada de y respecto a x.

Integración por partes

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Lo que suele escribirse en la forma:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Para el caso de integrales impropias:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Casos en que se usa de integración por partes

Para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de $\log x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$. Se elige $u(x) = f(x)$.

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x$$

Cuando $f(x)$ es de la forma $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\,\operatorname{sen}(ax)$, $P(x)\cos(ax)$, donde $P(x)$ es una función polinómica. En todos los casos se elige $u(x) = P(x)$ y se obtiene una integral *del mismo tipo que la primera pero con el grado del polinomio rebajado en una unidad*. El proceso se repite tantas veces como sea necesario.

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$$

Casos en que se usa de integración por partes

Cuando la integral $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ es parecida a la de partida, de forma que al volver a aplicar el proceso la integral de partida se repite y es posible despejarla de la igualdad obtenida.

$$\int \cos(\log x)\,\mathrm{d}x$$

Integración por recurrencia

La técnica de integración por partes permite en algunas ocasiones relacionar una integral de la forma $I_n = \int f(x,n)\,\mathrm{d}x$ en la que interviene un **parámetro** n (con frecuencia un número natural) con otra del mismo tipo en la que el parámetro ha disminuido en una o en dos unidades.

Las expresiones así obtenidas se llaman **fórmulas de reducción o de recurrencia** y permiten el cálculo efectivo de la integral cuando se particularizan valores del parámetro.

Ejemplos de integración por recurrencia

$$I_n = \int (\log x)^n \, \mathrm{d}x \,, \;\; I_n = \int x^n \, \mathrm{e}^{a\,x} \;\mathrm{d}x \,, \;\; I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$$

Integración por sustitución o cambio de variable

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = g(t),\ \ \mathrm{d}x = g'(t)dt \\ a = g(c),\ b = g(d) \end{array}\right] = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

Para el caso de integrales indefinidas este proceso de sustitución se representa de forma menos precisa y se escribe simplemente

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = g(t) \\ \mathrm{d}x = g'(t)dt \end{array}\right] = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

Pueden hacerse cambios de variable en integrales impropias

Puede ocurrir que al hacer un cambio de variable en una *“integral corriente”* obtengamos una *“integral impropia”*. No hay que preocuparse porque **para estudiar la convergencia de una integral pueden hacerse cambios de variable *biyectivos*: ello no altera la eventual convergencia de la integral ni su valor**.

Ejemplo

Con frecuencia se hacen cambios de variable para quitar radicales.

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo

Un cambio de variable en una integral impropia. Sea $a < b$. Consideremos la integral:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x$$

Integración de funciones racionales

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)}$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, *supondremos que el grado de P es menor que el grado de Q. Supondremos también que el coeficiente líder del polinomio Q es* 1.

La técnica para calcular la integral consiste en descomponer la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en otras más sencillas llamadas *“fracciones simples”*. Estudiaremos dos formas de hacerlo: el método de los coeficientes indeterminados y una variante del mismo conocida como Método de Hermite.

Método de los coeficientes indeterminados

Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador $Q(x)$ en producto de factores irreducibles lineales $x-\alpha$ y cuadráticos x^2+bx+c sin raíces reales ($b^2-4c<0$). Estos factores puede aparecer repetidos.

Cada raíz real α de orden o multiplicidad k da lugar a un factor del tipo $(x-\alpha)^k$.

Cada raíz compleja junto con su conjugada de multiplicidad p dan lugar a un factor del tipo $(x^2+bx+c)^p$.

Método de los coeficientes indeterminados

Se iguala $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a una suma de fracciones simples.

Por cada raíz real α de $Q(x)$ de multiplicidad k debemos poner una suma de k fracciones de la forma:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{(x-\alpha)^j}$$

Para cada raíz compleja de multiplicidad p debemos poner una suma de fracciones del tipo:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{B_j x + C_j}{(x^2+bx+c)^j}$$

Método de los coeficientes indeterminados

Los coeficientes A_j, B_j, C_j se calculan reduciendo a común denominador e identificando numeradores.

$$\int \frac{2-x^2}{x^3-3x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{x^4+6x^3-7x^2-4x-3}{x^3-2x^2+x-2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{3x^2+30}{x^4+2x^2-8}\,\mathrm{d}x$$